SESSION DE 1976

MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures. — COEFFICIENT : 2

Matériel à prévoir : *Papier millimétré; tables de fonctions usuelles.*

La partie III *est indépendante des parties* I *et* II

I

Soit α un nombre réel, positif ou nul.

1° On considère la fonction f_α définie, pour t positif ou nul, par :

$$f_\alpha(t) = t^\alpha e^{-t^2}, \quad \text{avec} \quad f_0(0) = 1 .$$

a. Étudier les variations de f_α .

b. Soit C_α la représentation graphique de f_α par rapport à un repère orthonormé.

Construire, sur une même feuille de papier millimétré, les courbes C_α correspondant aux valeurs suivantes de α :

$$0 , \frac{1}{2} , 1 , 4$$

(Unités : 10 cm sur chaque axe.)

On déterminera, pour chaque courbe :

— les coordonnées, à 0,01 près, des points à tangente parallèle à l'axe des abscisses;

— la demi-tangente au point $t = 0$.

On précisera les positions relatives des courbes, mais on n'étudiera pas leur concavité.

2° On considère l'intégrale généralisée :

$$J(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t^2} dt .$$

a. Démontrer la convergence de $J(\alpha)$. (On utilisera, pour t assez grand, une majoration de e^{-t^2} par une puissance convenable de t.)

b. Pour α supérieur ou égal à 2, trouver une relation entre $J(\alpha)$ et $J(\alpha - 2)$.

c. En admettant que $J(0) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, calculer $J(n)$ pour n entier positif.

3° Soit x un réel quelconque. Démontrer la convergence de chacune des intégrales généralisées :

$$\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t^2} \cos(tx)\, dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t^2} \sin(tx)\, dt .$$

II

On rappelle que, si une fonction numérique f est définie et indéfiniment dérivable sur $\mathbf{R}$, on peut écrire, pour tout entier strictement positif n, la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n :

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{p=1}^{n} \frac{h^p}{p!} f^{(p)}(x) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x + \theta h)$$

(x et h : réels quelconques; θ : nombre de l'intervalle $]0,1[$, qui dépend en général de x et de h).

On considère les fonctions F et G définies sur $\mathbf{R}$ par :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(tx)\, dt \quad \text{et} \quad G(x) = \int_0^{+\infty} te^{-t^2} \sin(tx)\, dt .$$

.../...

1° Calcul de F(x) : *première méthode.*

a. En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 à la fonction cosinus, établir la formule suivante :

$$F(x + h) = F(x) - h\,G(x) + h^2\,A(x, h)$$

où :

x et h sont deux réels quelconques

A est une fonction, définie sur l'ensemble des points $(x\,,\ h)$ de $\mathbf{R}^2$ pour lesquels h est différent de zéro, et *bornée.*

En déduire que F est dérivable sur $\mathbf{R}$, et exprimer sa dérivée à l'aide de G.

b. En transformant G à l'aide d'une intégration par parties, obtenir une équation différentielle du premier ordre dont F soit l'une des solutions. Intégrer cette équation, et en déduire F.

2° Calcul de F(x) : *deuxième méthode.*

a. Trouver le rayon de convergence de la série entière de terme général :

$$u_n(x) = \frac{n!}{(2n+1)!}\,x^{2n+1}.$$

Quelle est, pour x fixé, la limite de $u_n(x)$ quand n tend vers $+\infty$?

b. Soit n un entier strictement positif. En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre $(2n)$ à la fonction cosinus, établir, pour x réel quelconque, la formule suivante :

$$F(x) = \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p}{(2p)!}\,J(2p)\,x^{2p} + R_n(x)$$

où :

J a été défini dans la partie I

$R_n(x)$ vérifie : $|R_n(x)| \leqslant \dfrac{J(2n+1)}{(2n+1)!}\,|x|^{2n+1}$.

(On convient que $0! = 1$.)

En déduire que F est développable en une série entière dont on donnera le terme général et le rayon de convergence. Reconnaître la somme de cette série.

III

On considère l'intégrale :

$$K = \int_0^2 g(t)\,dt$$

où : $g(t) = e^{-t^2}\cos t$ (t étant exprimé en radians).

1° A l'aide d'une table de fonctions usuelles, calculer une valeur approchée de $g(0,2k)$, l'entier k variant de 0 à 10. (Les calculs seront tous conduits avec 4 décimales.)

2° En déduire une valeur approchée de K par la méthode des trapèzes, l'intervalle [0, 2] étant partagé en 10 intervalles égaux.

3° On prend K comme valeur approchée de :

$$F(1) = \int_0^{+\infty} g(t)\,dt\,.$$

Trouver un majorant de $|F(1) - K|$.

On pourra utiliser les résultats suivants, pour lesquels aucune explication n'est demandée :

(1) La méthode des trapèzes, appliquée au calcul de $\int_a^b f(x)\,dx$, l'intervalle $[a\,,b]$ étant partagé en n intervalles égaux, consiste à prendre comme valeur approchée de l'intégrale :

$$h\left[\frac{1}{2}\left(f(a)+f(b)\right) + \sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh)\right] \quad \text{avec } h = \frac{b-a}{n}\,.$$

L'incertitude absolue est $\dfrac{Mh^2}{12}$, M désignant un majorant de $|f''(t)|$ sur $[a\,,b]$.

(2) Pour $t \geqslant 2$, on a : $|\cos t| < \dfrac{t}{2}$.

(3) Pour $g(t) = e^{-t^2}\cos t$, le maximum de $|g''(t)|$ sur [0, 2] est $|g''(0)|$.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail